

**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1993-94**

Alberto Parmeggiani

**UN ESEMPIO DI GEOMETRIA
SUB-UNITARIA STRATIFICATA**

10 marzo 1994

Riassunto. Viene studiata la geometria subunitaria (nel senso di [P1]) del simbolo $\xi_1^2 + (x_1\xi_2 - Mb)^2$. Si mostra l'esistenza di una "stratificazione" della geometria e si determina un raggio "critico" ρ_{cr} , dipendente dal centro $\gamma^0 \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ della palla subunitaria, tale che se $\rho \leq \rho_{cr}/3$ o $\rho \geq 3\rho_{cr}$ allora $B_p(\gamma^0, \rho)$ e' essenzialmente un rettangolo.

Abstract. The subunit geometry (introduced in [P1]) of the symbol $\xi_1^2 + (x_1\xi_2 - Mb)^2$ is studied. The existence of a "stratification" of the geometry is shown and a "critical" radius ρ_{cr} is determined, depending on the center $\gamma^0 \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ of the subunit ball, such that if $\rho \leq \rho_{cr}/3$ or $\rho \geq 3\rho_{cr}$, $B_p(\gamma^0, \rho)$ is essentially a box.

Illustrero' in queste pagine un fenomeno di stratificazione della geometria sub-unitaria tipico del caso pseudodifferenziale, senza precedenti nel caso differenziale. Daro' percio' l'esempio di un simbolo pseudodifferenziale per il quale per ogni fissato centro (x^0, ξ^0) della palla subunitaria esiste un particolare raggio critico ρ_{cr} tale che la palla subunitaria $B_p((x^0, \xi^0), \rho)$ non e' comparabile ad un rettangolo per $\rho \sim \rho_{cr}$.

Nella prima parte microlocalizzero' il simbolo alle classi $S^2(1 \times M)$ (si veda [F], [P1], [P2] per un richiamo delle definizioni e termini, proprieta' ed enunciati), nella seconda descrivero' la geometria nel regime di transizione e nel terzo determinero' il raggio critico. L'esistenza di questo esempio prova che il Teorema di Struttura 5.20 di [P1] e' ottimale.

L'esistenza di un numero limitato a priori di raggi critici e' congetturata in [P3], lavoro al quale rimando il lettore interessato ai dettagli di quanto detto nel seguito.

L'esempio e riduzione alle classi $S^2(1 \times M)$.

Sia $\{Q_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$ una partizione di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ in blocchi disgiunti, con centro di $Q_\nu = (x^\nu, \xi^\nu)$, tali che

$$\text{diam}_x Q_\nu \sim 1, \quad \text{diam}_\xi Q_\nu \sim \frac{1}{4}(1 + |\xi^\nu|),$$

e

$$\sum_\nu \chi_{10^3 Q_\nu} \leq C_*,$$

dove $C_* > 0$ e' una costante assoluta, χ_Q e' la funzione caratteristica dell'insieme Q e $10^3 Q$ e' il dilatato di Q , tenuto fisso il centro, del fattore 10^3 .

Ricordiamo che se $M \gg 1$, $0 < \delta \leq 1$, $m \in \mathbf{R}$, diciamo che una funzione $p \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ e' un simbolo di $S^m(\delta \times M\delta)$ se

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} (M\delta^2)^m \delta^{-|\alpha|} (M\delta)^{-|\beta|}, \quad \forall \alpha, \beta, \forall (x, \xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n.$$

Sia allora ξ_2^0 un particolare punto di \mathbf{R} , scelto in $\{\pi_{\xi_2}(\xi^\nu)\}_{\nu \in \mathbf{Z}}$, con $|\xi_2^0| \gg 1$. Sia poi $\bar{\alpha} \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ con $0 \leq \bar{\alpha} \leq 1$, $\bar{\alpha} \equiv 1$ per $|\xi_2 - \xi_2^0| \leq C|\xi_2^0|$, $\bar{\alpha} \equiv 0$ per $|\xi_2 - \xi_2^0| \geq 2C|\xi_2^0|$ ($C \geq 1$ e' una costante assoluta).

Sia $\alpha \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ definita da

$$\alpha(\xi_2) = \frac{1}{\sqrt{|\xi_2^0|}} \bar{\alpha}(\xi_2),$$

e sia

$$Q = \{(x, \xi) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2; |x_1|, |x_2| \leq 1, |\xi_1| \leq \frac{1}{10}|\xi_2^0|, |\xi_2 - \xi_2^0| \leq \frac{1}{10}|\xi_2^0|\}.$$

(Si noti che $\xi_2 \in \pi_{\xi_2}(Q) \implies |\xi_2| \sim |\xi_2^0|$.)

Pongo $M := |\xi_2^0|/10$. Sia anche $\beta \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ tale che $\beta \equiv 1$ per $|\xi_2 - \xi_2^0| \geq C|\xi_2^0|$, e $\beta \equiv 0$ per $|\xi_2 - \xi_2^0| \leq C|\xi_2^0|/2$. Notiamo che $Q \subset Q_{\eta_0}$, dove $\text{centro}(Q_{\eta_0}) = (0, 0, 0, \xi_2^0)$.

Definisco allora il simbolo pseudodifferenziale di $S^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$

$$p(x, \xi) = \xi_1^2 + (x_1 x_2 - \alpha(\xi_2))^2 \xi_2^2 + \beta(\xi_2) \sqrt{\xi_2^2 + 1}.$$

E' allora chiaro che p e' un simbolo pseudodifferenziale ≥ 0 e subellittico (al quale verra' occasionalmente associato l'operatore pseudodifferenziale (*pdo*) secondo il Calcolo Classico o il Calcolo di Weyl. Si veda ad esempio [P2]). Inoltre su un grande dilatato Q^{**} di Q si ha:

$$p|_{Q^{**}}(x, \xi) \in S^2(1 \times M).$$

Sia ora $\Phi: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ la trasformazione canonica definita da

$$\Phi: (x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \longmapsto \left(x_1, \frac{\xi_2 - \xi_2^0}{M}, \xi_1, Mx_2\right) = (y, \eta).$$

Si ha, con

$$\hat{Q} = \Phi(Q) = \{(y, \eta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2; |y_1|, |y_2| \leq 1, |\eta_1|, |\eta_2| \leq M\},$$

che Φ e' un diffeomorfismo simplettico **tame** (si veda [F] o [P2]) su Q , che

$$p(x, \xi) \sim \xi_1^2 + M^2(x_1x_2 - b)^2 \quad \text{su } Q \quad \text{e che}$$

$$(p \circ \Phi^{-1})(y, \eta) = \eta_1^2 + (x_1\eta_2 - Mb)^2 \quad \text{su } \hat{Q},$$

infatti su un dilatato di \hat{Q} , con $b \sim M^{-1/2}$.

Dal punto di vista operatoriale si ha la cosa seguente. Se F_Φ e' l'operatore integrale di Fourier la cui relazione canonica e' il grafico di Φ , si ha, per lo "Sharp Egorov Principle" (si veda [F] o [F-Ph]), che

$$\operatorname{Re}(F_\Phi^* \circ ((\chi^2 p) \circ \Phi^{-1})(y, D_y) \circ F_\Phi u, u) = \operatorname{Re}((\chi^2 p)(x, D_x)u, u) + O(\|u\|^2),$$

dove $\chi \in C_0^\infty(\operatorname{int} Q^\circ)$ e $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

L'esempio la cui geometria subunitaria verra' studiata al variare del raggio ρ sara' quindi (usando le precedenti notazioni e dopo aver esteso p a tutto $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ in modo che risulti $p \in S^2(1 \times M)$, si veda a riguardo [P1]):

$$p(x, \xi) = \xi_1^2 + (x_1\xi_2 - Mb)^2$$

su Q , blocco centrato in $(0, 0) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, di dimensioni $1 \times M$, con $1 \gg b \geq cM^{(\varepsilon-2)/2}$ (ε e' l'esponente di subellitticita').

La "Stratificazione".

Ricordo che se $0 \leq p \in S^2(Q)$ diro' che $q \in C_0^2(\text{int} Q^{**})$ e' un simbolo subunitario per p ($q \in \mathcal{S}(p, Q)$), se

$$(i) \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} (\text{diam}_x Q)^{1-|\alpha|} (\text{diam}_\xi Q)^{1-|\beta|}, \quad |\alpha| + |\beta| \leq 2;$$

$$(ii) \quad q(x, \xi)^2 \leq p(x, \xi), \quad \forall (x, \xi) \in Q^{**}.$$

$H_q(x, \xi)$ (il campo Hamiltoniano associato a q) e' detto *campo vettoriale subunitario*, e se $\Gamma(t; x^0, \xi^0)$ e' una *traiettoria spezzata subunitaria*, $\Gamma(0, x^0, \xi^0) = (x^0, \xi^0)$ (e cioe' $\dot{\Gamma}$ e' definita da una famiglia di H_q , $q \in \mathcal{S}(p, Q)$), si definisce

$$B_p((x^0, \xi^0), 1) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \exists \Gamma \text{ come sopra con } (x, \xi) = \Gamma(1, x^0, \xi^0)\};$$

e, per $0 < \rho \leq 1$,

$$B_p((x^0, \xi^0), \rho) := B_{\rho^2 p}((x^0, \xi^0), 1).$$

Rimando a [P1], [P2] o [P3] per le principali proprieta' degli oggetti sopra definiti.

Definizione. Un sottoinsieme $R \subset Q$, blocco di dimensioni $1 \times M$, tale che $R = I \times B$, con $I \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ e' definito essere una *good band* per $0 \leq p \in S^2(Q)$ ([P1] o [P3]) se

$$\text{diam}(I) \sim \text{diam}_{x_1}(Q), \quad \text{diam}_{x_2}(B) \sim \delta, \quad \text{diam}_\xi(B) \sim M\delta,$$

e, $\forall (x, \xi) \in R$,

$$p(x, \xi) = \xi_1^2 + \delta^2 e(x, \xi) (\xi_2 - M\delta b(x_1, x_2))^2 + (M\delta^2)^2 V(x_1, x_2),$$

con $e \in S^0(1 \times \delta \times M\delta)$, $e > 0$ ellittico, i.e. $e \sim 1$, $M\delta^2 b \in S^1(1 \times \delta \times M\delta)$, $0 \leq (M\delta^2)^2 V \in S^2(1 \times \delta \times M\delta)$.¹

In [P3] viene dimostrata, nelle ipotesi di subellitticità, l'esistenza di una tale regione R . (Si veda [P3] per una descrizione della geometria associata ad R .)

Siano

$$\bar{p}_1(x_2, \xi_2) = \frac{1}{2} \int_{x_1^0-1}^{x_1^0+1} p_1(x_1, x_2, \xi_2) dx_1, \quad p_1^*(x_2, \xi_2) := \left(\frac{|\xi_1^0|}{M}\right)^4 M^2 + \bar{p}_1(x_2, \xi_2).$$

Descrivo ora $B_p((x^0, \xi^0), 1)$ con $(x^0, \xi^0) = (\mu, 0, 0, 0)$, $1 \geq \mu > 0$, per una opportuna scelta di μ . Se I è un intervallo, $I \subset \pi_{x_1}(Q)^*$, tale che $|I| \sim 1$, $0 \notin I$, e $x_1 \in I \implies |x_1| \sim 1$, allora in questo caso $R = I \times \pi_{(x_2, \xi)}(Q)$. Siano $\bar{b} := \text{Av}_{x_1 \in I}(b/x_1)$ e $\bar{b}^2 := \text{Av}_{x_1 \in I}(b^2/x_1^2)$. Allora ξ potrà muoversi, usando i campi subunitari associati ad R , di una quantità

$$\sim M\Delta_0 = |\xi_1^0| + |\xi_2^0 - M\bar{b}| + M\sqrt{\bar{b}^2 - \bar{b}^2} \sim Mb.$$

Perciò B_p conterra sicuramente una regione di dimensioni $1 \times M\Delta_0$. Inoltre, poiché $p(x, \xi) \leq \xi_1^2 + \bar{p}_1(x_2, \xi_2)$, si ha immediatamente

$$B_p \subset \{(x, \xi); |x - x^0| \leq 1, |\xi - \xi^0| \leq Mb^{1/2}\}.$$

Si opera ora una decomposizione di C.Z. $\{Q_\nu\}_\nu$ di Q (si veda [P2]) relativamente a $p_1(x, \xi_2)$, con condizione di stop:

$$\text{diam}_x Q_\nu \sim \Delta_0.$$

¹Dico che

$$p(x_1, x', \xi') \in S^m(\delta_1 \times \delta_2 \times M\delta_2) \iff |\partial_{x_1}^\alpha \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\gamma p(x_1, x', \xi')| \leq C_{\alpha\beta\gamma} (M\delta_2^2)^m \delta_1^{-\alpha} \delta_2^{-|\beta|} (M\delta_2)^{-|\gamma|}.$$

Se $\delta_\nu = \text{diam}_x(Q_\nu)$, si ottengono, considerando i Q_ν tali che $\{(x, \xi); x_2 = 0, \xi = 0\} \cap Q_\nu \neq \emptyset$ e tralasciando i blocchi di indeterminazione, tre classi di blocchi B_1, B_2, B_3 , tali che:

- (i) $Q_\nu \in B_1 \iff p_{1|Q_\nu}$ e' ellittico (cosicche' si ha $\delta_\nu \sim b^{1/2}$);
- (ii) $Q_\nu \in B_2 \iff p_{1|Q_\nu}$ e' nonellittico-nondegenerato e $b^{1/2} \leq \delta_\nu \leq 1$;
- (iii) $Q_\nu \in B_3 \iff p_{1|Q_\nu}$ e' nonellittico-nondegenerato e $\delta_\nu \sim 1$.

Notiamo che se x_1 aumenta da 0 a 1, si passa da blocchi appartenenti a B_1 a blocchi appartenenti a B_2 , e a B_3 , da cui segue

$$Q_\nu \in B_i, Q_\mu \in B_j, i < j \implies \pi_\xi(Q_\nu) \subset \pi_\xi(Q_\mu).$$

D'altra parte l'intervallo permesso a ξ in Q_ν (i.e. usando

$$p^1(x, \xi) = (\text{diam}_x Q_\nu)^2 \xi_1^2 + p_1(x, \xi_2) \leq p(x, \xi)$$

poiche' $\xi_1 \in Q_\nu \implies |\xi_1| \leq M\delta_\nu$ e' $M\delta_\nu\sigma(\nu) := Mb/\delta_\nu$ (notiamo che $M\delta_\nu\sigma(\nu) \sim Mb/\sqrt{x_1^2 + b^2}$ per $|x_1| \sim \delta_\nu$) e si ha che

$$M\delta_\nu\sigma(\nu) \geq M\delta_\mu\sigma(\mu) \geq M\delta_\gamma\sigma(\gamma)$$

per $Q_\nu \in B_1, Q_\mu \in B_2, Q_\gamma \in B_3$ rispettivamente. Sia Q_0 il blocco contenente γ^0 . Operando una scelta di μ (in modo tale che il tempo necessario per raggiungere blocchi Q_ν nei quali ci si puo' muovere nella direzione ξ con la migliore velocita' a disposizione sia ~ 1 , e rimanga cosi' un tempo arbitrariamente piccolo, quindi insufficiente per raggiungere punti "sopra" (x^0, ξ^0) , i.e. punti del tipo (x^0, ξ) , con $|\xi|$ il massimo possibile) si ottiene la "stratificazione"

$$B_p((x^0, \xi^0), 1) \subset \bigcup_{\nu=1}^{\nu_{\max}} B_\nu,$$

dove $\{1, 2, \dots, \nu_{max}\} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3$ e

$$\text{diam}_{\xi\pi_{\xi}}(B_i) \gg \text{diam}_{\xi\pi_{\xi}}(B_j) \gg \text{diam}_{\xi\pi_{\xi}}(B_k)$$

per $i \in \mathcal{N}_1, j \in \mathcal{N}_2, k \in \mathcal{N}_3$. Poiche' $(x^0, \xi^0) \in B_{\nu}$ per un certo $\nu \in \mathcal{N}_3$, e punti di $B_{\nu}, \nu \in \mathcal{N}_1$ e ξ -altezza ² massima possono essere raggiunti, si ottiene che la palla subunitaria risulta essere "stratificata" nel suddetto senso.

²Qui ed oltre definisco la ξ -altezza essere la distanza piu' grande da ξ^0 ottenibile lungo traiettorie subunitarie nello spazio $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$.

Determinazione di ρ_{cr} .

Vogliamo ora provare che, considerando la palla subunitaria al variare del raggio ρ , esiste un raggio critico ρ_{cr} , dipendente dal centro (x^0, ξ^0) , tale che per $\rho \leq c\rho_{cr}$ e per $\rho \geq C\rho_{cr}$ ($c, C > 0$ costanti assolute) $B_p(\gamma^0, \rho)$ e' essenzialmente un rettangolo. Notiamo che per ogni fissato centro (x^0, ξ^0) il numero di tali ρ_{cr} e' limitato a-priori. Useremo le seguenti notazioni: $I_\rho = I_\rho(x_1^0) = [x_1^0 - \rho, x_1^0 + \rho]$, e

$$\bar{p}_\rho(x_2, \xi_2) := (Av_{x_1 \in I_\rho} p_1)(x_2, \xi_2).$$

Considero allora, sul blocco Q di dimensioni $1 \times M$, centrato in $(0, 0)$, l'operatore $\rho^2 p(x, \xi)$.

Assumo di essere nella seguente situazione (si veda l'ipotesi $(A2\nu)$ di [P3]):

$$(1) \quad \rho_{min} < \rho < \rho_{max}.$$

D'altra parte, considerando $\rho^2 p$ su Q , si ha che la decomposizione di C.Z. si ferma a $Q_\nu \subset Q$ o perche' $\rho^2 p|_{Q_\nu}$ e' ellittico o perche' $\rho^2 p|_{Q_\nu}$ e' nondegenerato.

Se $\gamma^0 \in Q_\nu$, blocco sul quale $\rho^2 p|_{Q_\nu}$ e' ellittico, la palla e' un rettangolo, percio' considerero' solo il caso in cui $\rho^2 p|_{Q_\nu}$ e' nonellittico-nondegenerato.

Poiche' $\rho^2 p(x, \xi) = \rho^2 \xi_1^2 + \rho^2 p_1(x, \xi_2)$, la nondegeneratezza-nonellittica si verifichera' su un blocco Q_ν tale che dimensioni(Q_ν) $\sim \rho \times M\rho$. Abbiamo cosi' la seguente prima condizione: supponiamo che $\gamma^0 \in Q_\nu$, con $\rho^2 p|_{Q_\nu}$ nonellittico-nondegenerato, allora si ha $\rho^2 p(\gamma^0) \leq CM^2 \rho^4$, i.e.

$$(2) \quad \rho \geq \sigma(\gamma^0) := \left(\frac{|\xi_1^0|^2}{M^2} + \left| \mu \frac{\xi_2^0}{M} - b \right|^2 \right)^{1/2},$$

da cui, se $\rho \leq \sigma(\gamma^0)$, oppure $\rho \sim \sigma(\gamma^0)$, la palla e' un rettangolo. Infatti, poiche'

$M^2\sigma(\gamma^0)^2 = p(\gamma^0)$ e $\rho \leq \sigma(\gamma^0)$ (o $\rho \sim \sigma(\gamma^0)$) implica

$$\rho^2 p(\gamma^0) \leq C M^2 \rho^4 = C \rho^2 M^2 \rho^2 \leq C' \rho^2 M^2 \sigma(\gamma^0)^2 \sim \rho^2 p(\gamma^0),$$

si ha che $\rho^2 p(\gamma^0)$ e' comparabile al massimo di $\rho^2 p$ sul blocco Q_ν di dimensioni $\rho \times M\rho$. Poiche' $\rho^2 p$ e' un polinomio, da cio' segue che la palla e' un rettangolo. Per $\rho \geq \rho_0 = \sigma(\gamma^0)/C^{1/2}$, si considera una decomposizione di C.Z. relativa a $p_\rho^*(x_2, \xi_2)$. In questo caso

$$\begin{aligned} (3) \quad p_\rho^*(x_2, \xi_2) &= \rho^2 \bar{p}_\rho(x_2, \xi_2) + \left(\frac{|\xi_1^0|}{M}\right)^4 M^2 = \\ &= \rho^2 \left(\mu \xi_2 - Mb\right)^2 + \frac{1}{3} \rho^4 \xi_2^2 + \left(\frac{|\xi_1^0|}{M}\right)^4 M^2 = \\ &= \rho^2 \left(\mu^2 + \frac{1}{3} \rho^2\right) \left(\xi_2 - \frac{Mb\mu}{\mu^2 + \frac{1}{3} \rho^2}\right)^2 + \frac{M^2 b^2 \rho^4}{3(\mu^2 + \frac{1}{3} \rho^2)} + \left(\frac{|\xi_1^0|}{M\rho}\right)^4 M^2 \rho^4. \end{aligned}$$

Considero

$$(4) \quad \partial_{\xi_2}^2 p_\rho^*(x_2, \xi_2) \equiv 2\rho^2 \sigma(\mu, \rho), \quad \partial_{x_2}^2 p_\rho^* \equiv 0,$$

dove $\sigma(\mu, \rho) := \mu^2 + \frac{1}{3} \rho^2$.

Si hanno allora i seguenti casi:

- (i) $\partial_{\xi_2}^2 p_\rho^* \sim \rho^4$ in caso $|\mu| \leq \rho$;
- (ii) $\partial_{\xi_2}^2 p_\rho^* \sim \rho^2 \mu^2$ in caso $\rho \leq |\mu|$.

Nel caso (i)

$$p_\rho^*(x_2, \xi_2) \sim \rho^4 \left(\xi_2 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu, \rho)}\right)^2 + \left\{\frac{b^2}{\rho^2} + \left(\frac{|\xi_1^0|}{M\rho}\right)^4\right\} (M\rho^2)^2.$$

Nel caso (ii)

$$p_\rho^*(x_2, \xi_2) \sim \rho^2 \mu^2 \left(\xi_2 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu, \rho)}\right)^2 + \left\{\frac{b^2}{\mu^2} + \left(\frac{|\xi_1^0|}{M\rho}\right)^4\right\} (M\rho^2)^2.$$

Ricordo che stiamo supponendo che $\rho^2 p$ (e quindi p_ρ^*) possa essere localizzato a $Q_\nu \ni \gamma^0$, dimensioni(Q_ν) $\sim \rho \times M\rho$. Allora dev'essere, nel caso (i):

$$\frac{b^2}{\rho^2} + \left(\frac{|\xi_1^0|}{M\rho}\right)^4 := G_1(\rho) \leq C_1;$$

nel caso (ii):

$$\frac{b^2}{\mu^2} + \left(\frac{|\xi_1^0|}{M\rho}\right)^4 := G_2(\rho) \leq C_1,$$

dove $C_1 > 0$ e' una costante assoluta.

Percio', se $G_1(\rho) \geq C_2$, per un'altra costante assoluta $C_2 > 0$, si ha nel caso (i) che p_ρ^* e' ellittico e la palla e' una rettangolo; se $G_2(\rho) \geq C_2$, di nuovo si ha ellitticita' di p_ρ^* . Lo stesso vale nel caso (ii).

(Osservo che se $G_1(\rho) \leq C_1$, allora si ha che o $b^2/\rho^2 \leq C_1/2$, o $(|\xi_1^0|/(M\rho))^4 \leq C_1/2$, oppure entrambi; lo stesso vale per $G_2(\rho) \leq C_1$. Riguardo $G_1(\rho) \geq C_2$, si ha che almeno uno tra b^2/ρ^2 e $(|\xi_1^0|/(M\rho))^4$ e' maggiore o uguale a $C_2/2$.)

Ad ogni modo, le condizioni su G_1 e G_2 determinano un intervallo di valori per ρ . Ora suppongo che

$$\frac{1}{3}|\mu| \geq \rho_0$$

ed esamino i seguenti casi:

$$(5) \quad |\mu| \leq \rho, \quad \rho \in \{\rho \in \mathbf{R}_+; G_1(\rho) \leq C_1\} := S(G_1)$$

(nel caso $S(G_1) \cap [|\mu|, \rho_{max}] \neq \emptyset$);

$$(6) \quad \rho \in [\rho_0, |\mu|] \cap S(G_2)$$

(nel caso in cui l'intersezione sia non-vuota).

Nel caso (5) p_ρ^* e' nondegenerato alla scala $\sim \rho^2 \times M\rho^2$ su un blocco $Q_{\nu_0}^2, \gamma_2^0 \in Q_{\nu_0}^2$. p_ρ^* puo' essere ellittico o nonellittico-nondegenerato su $Q_{\nu_0}^2$. Essendo localizzabile

a $Q_{\nu_0}^2$, si ha che

$$p_\rho^*(\gamma_2^0) \sim \rho^4 \left(\xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu, \rho)} \right)^2 + G_1(\rho)(M\rho^2)^2 \leq C(M\rho^4)^2,$$

i.e.

$$(7) \quad H_1(\rho) := \frac{1}{\rho^4} \left(\frac{\xi_2^0}{M} - \frac{b\mu}{\sigma(\mu, \rho)} \right)^2 + \frac{G_1(\rho)}{\rho^4} \leq C.$$

Se p_ρ^* e' ellittico su $Q_{\nu_0}^2$, la palla e' un rettangolo; se e' nonellittico-nondegenerato, allora, in ogni caso, lo e' per

$$\rho \in C_1 := [|\mu|, \rho_{max}] \cap S(G_1) \cap S(H_1)$$

(un insieme eventualmente vuoto). Poiche' C_1 e' intersezione di insiemi di livello di funzioni razionali di ρ , quozienti di polinomi di grado limitato a-priori (indipendente da γ^0 e b), si ha che C_1 e' costituito da un numero limitato a-priori di componenti connesse.

Lo stesso vale nel caso (6), ed e' cosi' possibile ottenere una condizione sulla corrispondente $H_2(\rho)$:

$$p_\rho^*(\gamma_2^0) \sim \rho^2 \mu^2 \left(\xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu, \rho)} \right)^2 + G_2(\rho)(M\rho^2)^2 \leq C(M(\rho\mu)^2)^2,$$

da cui segue

$$(8) \quad H_2(\rho) := \frac{1}{(\rho\mu)^2} \left(\frac{\xi_2^0}{M} - \frac{b\mu}{\sigma(\mu, \rho)} \right)^2 + \frac{G_2(\rho)}{\mu^4} \leq C,$$

e la condizione

$$\rho \in C_2 := [\rho_0, |\mu|] \cap S(G_2) \cap S(H_2)$$

(un insieme eventualmente vuoto). Come C_1 , C_2 consiste di un numero limitato a-priori di componenti connesse. (Nel caso sia $p_\rho^*(\gamma_2^0) \sim M^2(\rho\mu)^4$, si ha che la palla e' un rettangolo poiche' si avrebbe che in $(\bar{x}_1, x_2^0; \xi^0)$, per un certo $\bar{x}_1 \in I_\rho$, il

polinomio $\rho^2 p_1(x, \xi_2) + (|\xi_1^0|/M)^4 M^2$ sarebbe comparabile al suo massimo su un blocco di dimensioni $\rho|\mu| \times M\rho|\mu|$.)

Ora distinguo i seguenti casi:

$$(9) \quad \rho \in [\rho_0, \frac{1}{3}|\mu|] \cap C_2;$$

$$(10) \quad \rho \in (C_2 \cap [\frac{1}{3}|\mu|, |\mu|]) \cup (C_1 \cap [|\mu|, 3|\mu|]);$$

$$(11) \quad \rho \in [3|\mu|, \rho_{\max}] \cap C_1$$

(nel caso in cui questi insiemi siano non vuoti).

CASO (9). Considero una decomposizione di C.Z. relativa a $\rho^2 p_1(x, \xi_2)$. Sia Q_ν il blocco di C.Z. per il quale vale $\gamma_2^0 \in \pi_{(x_2, \xi_2)}(Q_\nu)$.

Poiché $\partial_{\xi_2}^2(\rho^2 p_1) = 2\rho^2 x_1^2$, la "good band" R in questo caso ha dimensioni $\sim \rho \times \rho|\mu| \times M\rho|\mu|$. Sia $M\rho|\mu|\Delta_0$ la " ξ -altezza" data da R . La condizione di stop per la localizzazione di $\rho^2 p_1$ in questo caso è: $(\text{diam}_x Q_\nu) \sim \Delta_0 \rho|\mu|$.

Da $I_\rho \subset [\frac{2}{3}\mu, \frac{4}{3}\mu]$ (possiamo supporre $\mu > 0$, come faremo d'ora in poi) segue che $\rho^2 p_1(x, \xi_2) \sim \rho^2 \mu^2 (\xi_2 - M(b/x_1))^2$ su R e $\forall x_1 \in I_\rho$, da cui

$$(12) \quad M\rho\mu\Delta_0 = |\xi_1^0| + |\xi_2^0 - M\bar{b}| + M\rho\mu(\bar{b}^2 - \bar{b}^2)^{1/2},$$

dove ora $\bar{b}^2 := \text{Av}_{x_1 \in I_\rho}(b^2/x_1^2)$ e $\bar{b} := \text{Av}_{x_1 \in I_\rho}(b/x_1)$. Per avere informazioni sui blocchi di C.Z. relativi a $\rho^2 p_1$ considero la regione

$$(13) \quad W = \{(x, \xi); |x_1 - x_1^0| \leq \rho, |x_2 - x_2^0| \leq c\rho\mu, |\xi - \xi^0| \leq c\Delta_0 M\rho\mu\}$$

dove $c > 0$ è una costante assoluta (notiamo che $\pi_{(x_2, \xi_2)}(W) \subset Q_{\nu_0}^{2**}$). Sia poi

$$N = \{\nu; Q_\nu \cap W \neq \emptyset, \text{diam}_x Q_\nu \geq \rho\mu\Delta_0\}.$$

(Notiamo che $\pi_{x_1}(Q_\nu^h \cap W)$ contiene un intervallo di diametro $\sim \delta_\nu$.)

Ora mostro che:

$$B_p(\gamma^0, \rho) \approx \{(x, \xi); |x_1 - x_1^0| \leq \rho, |x_2 - x_2^0| \leq \rho|\mu|, |\xi - \xi^0| \leq M\rho|\mu|\},$$

oppure

$$B_p(\gamma^0, \rho) \approx W.$$

In entrambi i casi, la palla e' un rettangolo.

Suppongo che, per un certo $\nu \in N$, $\rho^2 p_{1|Q_\nu}$ sia ellittico. Allora si ha che

$$\partial_{\xi_2}^2(\rho^2 p_{1|Q_\nu}) = 2\rho^2 x_1^2 \leq C\delta_\nu^2,$$

da cui segue, essendo $|x_1| \sim |\mu|$ su $Q_\nu \cap W$, $\delta_\nu \gtrsim \rho|\mu|$.

D'altra parte e' $p_\rho^*(x_2, \xi_2) \leq CM^2\rho^4\mu^4$, per cui, poiche' $\bar{p}_\rho(x_2, \xi_2) \gtrsim M^2\delta_\nu^4$ per $(x_2, \xi_2) \in \pi_{(x_2, \xi_2)}(Q_\nu \cap W)$, si ha $\delta_\nu \sim \rho|\mu|$.

Allora Q_ν ha dimensioni $\sim \rho\mu \times M\rho\mu$. Sia ora $W_\nu = Q_\nu^h \cap R$, e sia $\bar{\xi}_2 \in \pi_{\xi_2}(W_\nu)$. Si ha che $p_\rho^*(x_2, \bar{\xi}_2) \sim M^2(\rho\mu)^4$, e che, scrivendo $R^2 = \pi_{(x_2, \xi_2)}(R)$,

$$\max_{(x_2, \xi_2) \in R^2} p_\rho^*(x_2, \xi_2) \sim M^2(\rho\mu)^4.$$

D'altra parte si ha:

$$\begin{aligned} (14) \quad & \max_{(x_2, \xi_2) \in R^2} p_\rho^*(x_2, \xi_2) \sim \\ & \sim \rho^2 \mu^2 \left(\xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu, \rho)} + c\Delta_0 M\rho\mu \right)^2 + \rho^2 \mu^2 \left(\xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu, \rho)} - c\Delta_0 M\rho\mu \right)^2 + V(\mu, \rho) M^2(\rho\mu)^4 \sim \\ & \sim \rho^2 \mu^2 \left\{ \left(\xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu, \rho)} \right)^2 + c^2 \Delta_0^2 M^2(\rho\mu)^2 \right\} + V(\mu, \rho) M^2(\rho\mu)^4 \sim M^2(\rho\mu)^4, \end{aligned}$$

dove si e' posto $V(\mu, \rho) := b^2 / (\mu^4(\mu^2 + \frac{1}{3}\rho^2)) + (|\xi_1^0| / (M\rho\mu))^4$.

Percio' almeno uno dei termini

$$\rho^2 \mu^2 \left(\xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu, \rho)} \right)^2, \quad c^2 \Delta_0^2 M^2(\rho\mu)^4, \quad V(\mu, \rho) M^2(\rho\mu)^4 \geq \frac{1}{3} \bar{c} M^2(\rho\mu)^4,$$

e la palla e' essenzialmente un rettangolo di dimensioni $\sim \rho \times \rho|\mu| \times M\rho|\mu|$. (Nel caso sia $\rho^2\mu^2(\xi_2^0 - M(b\mu/\sigma(\rho, \mu)))^2 \geq \bar{c}M^2(\rho\mu)^4/3$, si ha $p_\rho^*(x_2, \xi_2^0) \sim M^2(\rho\mu)^4$.)

Suppongo ora che, per un certo $\nu \in N$, $\rho^2 p_{1|Q_\nu}$ sia nonellittico-nondegenerato a causa di $\partial_{x_1}^2(\rho^2 p_1)$. Di nuovo si ottiene che $\delta_\nu \sim \rho\mu$.

Fisso ora $\bar{\xi}_2 \in \pi_{\xi_2}(W_\nu)$ per un tale ν . Poiche' $\rho^2 p_1$ e' un polinomio, facendone la media rispetto a x_1 su $\pi_{x_1}(Q_\nu^h \cap R)$ si ottiene che $p_\rho^*(x_2, \bar{\xi}_2) \sim M^2(\rho\mu)^4$, e quindi che

$$\max_{(x_2, \xi_2) \in R} p_\rho^*(x_2, \xi_2) \sim M^2(\rho\mu)^4.$$

Come prima si ha allora che la palla e' un rettangolo di dimensioni $\sim \rho \times \rho|\mu| \times M\rho|\mu|$.

Suppongo infine che, per un certo $\nu \in N$, $\rho^2 p_{1|Q_\nu}$ sia nonellittico-nondegenerato a causa di $\partial_{\xi_2}^2$. Allora la palla e' un rettangolo $\approx W$ (in questo caso, $\delta_\nu^2 \sim \partial_{\xi_2}^2(\rho^2 p_1)|_{Q_\nu} \sim \rho^2 \mu^2$).

Sia infatti $B = \{(x, \xi) \in Q; x_1 \in I_\rho\}$ e $N' = \{\nu; Q_\nu \cap B \neq \emptyset, \pi_{(x_2, \xi_2)}(Q_\nu) \cap Q_{\nu_0}^{2**} \neq \emptyset\}$.

Allora si ha che, per ogni $\nu \in N'$, $\delta_\nu \sim \rho\mu$, e che

$$\rho^2 p_{1|Q_\nu \cap B}(x, \xi) = \rho^2 x_1^2 \left(\xi_2 - \frac{Mb}{x_1} \right)^2.$$

Osserviamo che sappiamo gia' che

$$\pi_{x_1}(B_p(\gamma^0, \rho)) \subset I_\rho(x_1^0).$$

Un simbolo q subordinato a $\rho^2 p$ puo' essere scritto nella forma $q_1 + q_2$, con q_1 subordinato a $\rho^2 \xi_1^2$, e q_2 subordinato a $\rho^2 p_1$. Poiche' p_ρ^* e' localizzabile alla scala $\rho\mu \times M\rho\mu$, e $\rho^2 p_1 \leq Cp_\rho^*$, si ha che (Γ e' una traiettoria subunitaria)

$$|\partial_{\xi_2} q(\Gamma(t; \gamma^0))| \leq C\rho|\mu|.$$

Se denoto con Γ_2 la ξ -proiezione di Γ , si ha anche

$$|\partial_x q(\Gamma(t; \gamma^0))| \leq C(\Delta_0 M\rho|\mu| + |\Gamma_2(t, \gamma^0) - \xi^0|).$$

Cio' prova (insieme ad un lemma di Gronwall) che anche in questo caso la palla e' un rettangolo:

$$B_p((x^0, \xi^0), \rho) \approx \{(x, \xi); |x_1 - x_1^0| \leq \rho, |x_2 - x_2^0| \leq \rho|\mu|, |\xi - \xi^0| \leq \Delta_0 M \rho |\mu|\}.$$

Cio' conclude il **Caso (9)**.

CASO (11). In questo caso si ha che $0 \in I_\rho(x_1^0)$, e che

$$p_\rho^*(x_2, \xi_2) \sim \rho^4 \left(\xi_2 - M \frac{b\mu}{\sigma(\mu, \rho)} \right)^2 + M^2 b^2 \rho^2 + \left(\frac{|\xi_1^0|}{M} \right)^4 M^2.$$

La ξ -altezza data dalla "good band" R e' ora

$$M \rho^2 \Delta_0 \sim |\xi_1^0| + |\xi_2^0 - M \bar{b}| + M (\bar{b}^2 - \bar{b}^2)^{1/2}.$$

Notiamo che

$$(15) \quad B_{p_\rho^*}((x_2^0, \xi_2^0), 1) \approx \{(x_2, \xi_2); |x_2 - x_2^0| \leq \rho^2, |\xi_2 - \xi_2^0| \leq M \rho^2 \Delta_1\},$$

con

$$M \rho^2 \Delta_1 \sim |\xi_1^0| + |\xi_2^0 - M \frac{b\mu}{\sigma(\mu, \rho)}| + M b^{1/2} \rho^{1/2} \sim |\xi_1^0| + |\xi_2^0| + M b^{1/2} \rho^{1/2}$$

essendo, in questo caso,

$$M \frac{b\mu}{\sigma(\mu, \rho)} \sim \frac{M b \mu}{\rho^2} = M \frac{b^{1/2}}{\rho^{3/2}} b^{1/2} \frac{\mu}{\rho^{1/2}} \leq C M b^{1/2} \rho^{1/2}.$$

Inoltre $M \bar{b}^{1/2}, M \bar{b} \leq M b^{1/2} \rho^{1/2}$ (poiche' in questo caso $H_1(\rho) \leq C$). Considero i seguenti due casi (la condizione di stop e' ora data da: $\text{diam}_x Q_\nu \sim \Delta_0 \rho^2$):

- (i) $M \rho^2 \Delta_0 \gtrsim M b^{1/2} \rho^{1/2}$ (oppure $M \rho^2 \Delta_0 \sim M b^{1/2} \rho^{1/2}$);
- (ii) $M \rho^2 \Delta_0 \lesssim M b^{1/2} \rho^{1/2}$.

Poiche' nel caso (i) $M\rho^2\Delta_0 \sim M\rho^2\Delta_0 + Mb^{1/2}\rho^{1/2}$, si ha allora che

$$M\rho^2\Delta_0 \sim |\xi_1^0| + |\xi_2^0| + Mb^{1/2}\rho^{1/2}$$

(infatti $|\xi_2^0 - M\bar{b}| + Mb^{1/2}\rho^{1/2} \sim |\xi_2^0| + Mb^{1/2}\rho^{1/2}$), che e' comparabile al massimo possibile (dato in (15)). Percio' nel caso (i) la palla e' un rettangolo.

Nel caso (ii) si ha che $|\xi_1^0|, |\xi_2^0 - M\bar{b}| \leq Mb^{1/2}\rho^{1/2}$, da cui segue che $M\rho^2\Delta_1 \sim |\xi_2^0| + M\rho^{1/2}b^{1/2}$.

Considero ora le seguenti quantita':

$$(16) \sigma_1(p_\rho^*) := \max_{(x_2, \xi_2) \in \mathbb{R}^2} p_\rho^*(x_2, \xi_2) \sim \rho^4 \left(\left| \xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu, \rho)} \right|^2 + M^2\rho^4\Delta_0^2 \right) + M^2b^2\rho^2 \sim \\ \sim \rho^4(|\xi_1^0|^2 + |\xi_2^0|^2) + M^2b^2\rho^2 = (M\rho^4)^2 \left\{ \left(\frac{|\xi_1^0|}{M\rho^2} \right)^2 + \left(\frac{|\xi_2^0|}{M\rho^2} \right)^2 + \frac{b^2}{\rho^6} \right\},$$

e

$$(17) p_2(p_\rho^*) := p_\rho^*(x_2, \xi_2^0) \sim \rho^4 \left(\xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu, \rho)} \right)^2 + M^2b^2\rho^2 \sim (M\rho^4)^2 \left\{ \left(\frac{|\xi_2^0|}{M\rho^2} \right)^2 + \frac{b^2}{\rho^6} \right\}.$$

Considero una decomposizione di C.Z. relativa a $\rho^2 p_1$. Sia \hat{Q} un blocco di C.Z. tale che $(0, 0) \in \hat{Q}$. Conseguentemente $\rho^2 p_{1|\hat{Q}}$ deve essere ellittico (nel presente caso (ii)) e dimensioni(\hat{Q}) $\sim (b\rho)^{1/2} \times M(b\rho)^{1/2}$. Posso supporre che sia $\xi_1^0 \in \pi_{\xi_1}(\hat{Q})$ (altrimenti saremmo nel caso (i) considerato sopra: sarebbe $|\xi_1^0| \sim M\rho^{1/2}b^{1/2}$ e percio' $M\rho^2\Delta_0 \sim M(b\rho)^{1/2}$).

Considero allora i casi seguenti:

$$(A) |\xi_2^0| \geq CM(b\rho)^{1/2};$$

$$(B) |\xi_2^0| \sim M(b\rho)^{1/2};$$

$$(C) \xi_2^0 \in \pi_{\xi_2}(\hat{Q}) \text{ (i.e. } |\xi_2^0| \leq CM(b\rho)^{1/2}).$$

(A): in questo caso si ha

$$\sigma_1(p_\rho^*) \sim \sigma_2(p_\rho^*) \text{ e } M\rho^2\Delta_1 \sim |\xi_2^0|.$$

Poiche' $\rho^2 p_1$ e' un polinomio nonnegativo, si ha che $\exists \bar{x}_1 \in \frac{1}{8}I_\rho$ (per esempio) tale che

$$\rho^2 p_1(\bar{x}_1, x_2^0, \xi_2^0) \sim (M\rho^4)^2 \left(\frac{|\xi_2^0|}{M\rho^2} \right)^2.$$

Esiste allora un intorno di $(\bar{x}_1, x_2^0, \xi_1^0, \xi_2^0)$ di dimensioni

$$\frac{|\xi_2^0|}{M\rho^2} \rho^2 \times M\rho^2 \frac{|\xi_2^0|}{M\rho^2}$$

sul quale $\rho^2 p_1 \sim (M\rho^4)^2 (|\xi_2^0|/(M\rho^2))^2 = \rho^4 |\xi_2^0|^2$, da cui segue la possibilita' di muoversi, lungo traiettorie subunitarie, di un ordine comparabile a $|\xi_2^0|$ nelle variabili ξ , i.e. il massimo possibile. Percio' la palla e' essenzialmente un rettangolo:

$$B_p(\gamma^0, \rho) \approx \{(x, \xi); |x_1 - x_1^0| \leq \rho, |x_2 - x_2^0| \leq \rho^2, |\xi - \xi^0| \leq |\xi_2^0|\}.$$

(B): questo caso e' completamente analogo al caso (A).

(C): in questo caso si ha che $M\rho^2 \Delta_1 \sim Mb^{1/2}\rho^{1/2}$ e' la massima ξ -altezza permessa. Poiche' ora $|\mu| \leq \rho/3$, posso raggiungere $x_1 = 0$ al tempo $\frac{1}{3}$, e, usando l'ellitticita' di $\rho^2 p_{1|\hat{Q}}$, raggiungere tramite traiettorie subunitarie i punti di una regione di dimensioni

$$\sim \frac{b^{1/2}}{\rho^{3/2}} \rho^2 \times M\rho^2 \frac{b^{1/2}}{\rho^{3/2}}.$$

Allora la palla e' un rettangolo:

$$B_p(\gamma^0, \rho) \approx \{(x, \xi); |x_1 - x_1^0| \leq \rho, |x_2 - x_2^0| \leq \rho^2, |\xi - \xi^0| \leq Mb^{1/2}\rho^{1/2}\}.$$

Cio' conclude il Caso (11).

CASO (10). Questo caso da' $|\mu|$ come raggio critico.

Per completare la discussione, devo ancora considerare i seguenti casi (ricordo che $\rho \geq \rho_0$):

$$\frac{1}{3}|\mu| \leq \rho_0 \leq |\mu|, |\mu| \leq \rho_0 \leq 3|\mu|, \rho_0 \geq 3|\mu|.$$

Nel primo caso le condizioni (9), (10) o (11) possono essere verificate, perciò valgono le conclusioni del **Caso (9)**, del **Caso (10)** e del **Caso (11)**.

Nel secondo caso la condizione (9) è vuota, mentre (10) o (11) possono essere verificate, dalla qual cosa seguono le conclusioni del **Caso (10)** e del **Caso (11)**.

Nel terzo caso solo la condizione (11) vale, da cui segue la conclusione del **Caso (11)**.

Riassumendo si ha il seguente

Teorema.

(1) Se $\rho \leq |\mu|/3$ la palla è un rettangolo:

$$B_{\rho^2 p}(\gamma^0, 1) \approx \{(x, \xi); |x_1 - x_1^0| \leq \rho, |x_2 - x_2^0| \leq \rho|\mu|, |\xi - \xi^0| \leq \Delta_0 M \rho |\mu|\}$$

con Δ_0 dato da (12);

(2) se $\rho \geq 3|\mu|$ la palla è un rettangolo:

$$B_{\rho^2 p}(\gamma^0, 1) \approx \{(x, \xi); |x_1 - x_1^0| \leq \rho, |x_2 - x_2^0| \leq \rho^2, |\xi - \xi^0| \leq |\xi_1^0| + |\xi_2^0| + M b^{1/2} \rho^{1/2}\}.$$

Si ha quindi una "transizione" della geometria per:

$$\rho_{cr} \sim |\mu| = |x_1^0|.$$

Bibliografia.

- [F] C.L.Fefferman, *The Uncertainty Principle*, Bull. of A.M.S. Vol.9, No.2 (1983).
- [Fe-Ph] C.L.Fefferman and D.H.Phong, *The Uncertainty Principle and Sharp Gårding Inequalities*, Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981).
- [P1] A.Parmeggiani, *Subunit Balls for Symbols of Pseudodifferential Operators*, Princeton Doctoral Dissertation (1993).
- [P2] A.Parmeggiani, *Microlocalizzazioni Sub-Unitarie di Operatori Pseudodifferenziali*, Seminario di Analisi Matematica, Università' di Bologna, Tecnoprint Bologna (1993).
- [P3] A.Parmeggiani, *Subunit Balls for Symbols of Pseudodifferential Operators*, preprint.